✓ 128 – Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents.

Motivation : décomposition de Dunford, qui ramène l'étude de tout endomph au polynôme caract scindé à l'étude d'un endomph diagonalisable et d'un endomph trigonalisable.
Prérequis : valeur propre, espace propre, vecteur propre, espace stable.

I) Généralités

1) Outils de base

E un K-ev de DF n, K=R ou C.

Lemme : lemme des noyaux + les projecteurs sur un noyau par rapport aux autres est un polynôme en u. [Gou 175 + Gou 194]

Déf : polynôme caractéristique, sous espace caractéristique.

Prop : F sev stable (u(F) inclus dans F). Alors le polynôme caractéristique de la restriction de u sur F divise le polynôme caractéristique de u. (écrire en matrice par blocs) [Cog 287]

Déf et prop : matrice compagnon, polynôme caractéristique (récurrence)

Th : Cayley Hamilton [Gou 177] *(on se donne x nin nul, on regarde {x,f(x),…,f^p(x)} où p est le petit entier tq la famille soit liée (on écrit la relation de liaison). On complète {x,f(x),…,f^{p-1}(x)} en une base de E, la matrice de f est par blocs avec un nul. On calcule le poly caract, il s'annule)*

Csq : E somme directe des SEC

Csq : les racines du polynôme minimal sont aussi racines du polynôme caract. Ainsi, les polynômes minimaux et caract ont même facteurs irréductibles *(pas si facile à montrer ! Ne pas scinder sur C ! On écrit que P est égal au produit des Q_i^n_i, puis E comme somme des SEC E_i, on dit que mu est le ppcm des mu_i des restrictions f_i sur chaque E_i. Q_i^n_i est alors un polynôme annulateur de f_i donc mu_i divise Q_i^n_i. Or Q_i est irred donc mu_i=Q_i^m_i. Du coup mu est égal au produit des Q_i^m_i, et ce sont bien les mêmes facteurs irred [Internet]*
Sinon on mq mu et P ont mêmes racines complexes. Sur C c'est clair que c'est les mêms facteurs irred. Sur R on prend Q irred qui divise les deux. Si le degré de Q est 1 alors c'est bon. Sinon, P = (X-a)(X-bar(a)), donc a et bar(a) sont vp donc divisent les deux [Mon 91 4^e edition]
Sinon, [Cog 288])

2) Trigonalisation et application

Définition : si la matrice de u est semblable à une matrice triangulaire supérieure dans une base.

Rq : se souvenir que u trigo ssi il existe une filtration maximale (une filtration est un drapeau, et une filtration maximal est un drapeau à n éléments, ie les sauts entre chaque espace sont de 1).

CNS : u trigo ssi il existe un polynôme annulateur scindé ssi le poly min est scindé ssi le poly caract est scindé. [BMP 166] *(récurrence)*

Rq : si K est alg clos, tout endomph est trigonalisable.

Appl : Cayley Hamilton. *(A une matrice, P le poly caract, L un corps de décomposition de P. A est trigo dans L) [Gou 176]*

Appl : les matrices diagonalisables sont denses dans Mn(C) mais pas dans Mn(R) *(discriminant pour Mn(R)).* [Gou 185]

Appl : CH

Prop : trigonalisation simultanée [Cog 318] ou Gou [166+171]

Prop : A dans Mn(C) est diagonalisable ssi l'orbite de A est fermée *[Caldero] passe par Jordan, ou [Gou 191] qui montre que A est semblable à une matrice triangulaire avec des petits termes hors diagonale*

II) Les endomorphismes nilpotents

1) Critères de nilpotence

Déf : A nilpotent

Critères : [BMP 170]
A matrice de Mn(K). Les pptés suivantes sont équivalentes :

- A nilpotente
- A^n=0 *(grâce à CH)*
- 0 est seule valeur propre de A dans **toute extension algébrique de K** *(garder l'exemple de $P=X(X^2+1)$ où 0 est le seule vp réelle mais pas nilpotent).*
- P=X^n
- mu=X^p où p est l'indice de nilpotence
- Il existe une base où la matrice de u est triangulaire supérieure

Rq : A diagonalisable et nilpotent => A=0

Prop : u est diagonalisable ssi K[u] ne contient aucun nilpotent non nul. *(se fait à la main si on se souvient qu'être nul dans K[u], c'est être divisible par mu)*

Prop : A matrice complexe. A nilpotente ssi pour tout k, tr(A^k)=0 [BMP 170]
Sens indirect : on trigonalise A, on lit ses vp sur la diago, les vp l_i de A^k sont les l_i^k. Donc Tr(A^k)=sum(l_i^k). P le poly caract.
A nilp ssi poly caract=X^n.
Posons s_k=sum(l_i^k) où les l_i sont les racines de P=X^n+…+a_0. On a les formules de Newton:
*S_k+a_n-1*S_k-1+…+ka_0=0 (k<n) [Gou 80]*
S_1+a_0=0
*S_2+a_1*S_1+2a_0=0*
S_3+a_2S_2+a_1S_1+3a_0=0
Donc les a_k sont nuls ssi les S_k sont nuls.
Donc P=X^n ssi les S^k sont nuls ssi tr(A^k) est nul pour k<n.

2) Le cône nilpotent

Prop : les matrices nilp forment un cône, instable par addition.

Prop : le sev engendré par le cône nilpotent est l'ens des matrices de trace nulle.

3) Exponentielle et nilpotents

Prop : somme de deux nilpotents qui commutent

Prop : Exponentielle d'une matrice nilpotente

Prop : Exp : nilpotents -> unipotents est un homéo de réciproque log [MT 60] *(N nilp. exp(N)=I+N+…=I+N' où N' nilpotent. Le log est bien défini sur U. Vérifier que log(expX)=X. On vérifie que log(exp(tX))=tX pour tout t. Coïncide en 0, reste à voir qu'il y a même dérivée : c'est le cas. Montrons que exp(logB)=B. B=I+N. t->exp(log(I+tN))-(Id+tN) est un poly en t. D'après ce qui précède, exp(logX)=X dans un vois de Id dans l'ens des matrices nilp (TIL) donc le polynôme précédent est nul dans un vois de zéro, donc identiquement nul).*

(On peut en déduire que l'exp est surj de Mn(C) sur GLn(C) [BMP 212])

III) Réductions de Dunford et Jordan

1) Dunford [Gou 193]

Nécessite le polynôme caractéristique scindé !

Th : Dunford *Comme on sait que les projecteurs p_i sont des polynômes en f, on pose d=sum(lambda_i*p_i), et n=f-d.*

Appl : calcul de puissance (formule binôme) et d'exponentielle [Gou 196]
Pour calculer l'exp, on écrit que *d=sum(lambda_i*p_i) et n=sum((f-lambda_i*Id)*p_i)*
*On a alors exp(d)=sum(exp(lambda_i*p_i)) et on calcule aussi exp(n) en fonction des p_i. On finit par Dunford en disant que exp(f)=exp(d)exp(n), exprimé en fonction des p_i, qu'on peut calculer par DES et Bézout.*

2) Jordan [Caldero] ou [Mneimné 44]

Dans tout ce qui suit on travaille dans Mn(C).

Th : A, B diagonalisables. A et B semblables ssi même poly caract.

On considère un endomorphisme nilpotent.

Prop : suite de noyaux emboîtés. Elle s'essouffle. On peut y associer un tableau de Young.

*La suite des noyaux croit en s'essoufflant. L'indice à partir duquel elle devient constante est la multiplicité dans le polynôme minimal. Par exemple, si Ker(A)=Ker(A²), 0 est racine simple dans le polynôme minimal. On en déduit que A est diagonalisable ssi Ker(A-lambda*Id)²= Ker(A-lambda*Id) pour tout lamba. Le nb de cases dans la première colonne du tableau est le degré du polynôme minimal (ie l'indice de nilpotence)*

Th : tout endomorphisme nilpotent admet une représentation en bloc de Jordan dans une bonne base. *On part d'un supplémentaire du dernier K_r différent de l'espace entier, et on en prend une base. Par récurrence, pour j qcq, on construit un supplémentaire de K_{j-1} dans K_j…Voir cours GC.*

Prop : deux endomorphismes nilpotents sont semblables ssi ils ont même tableau de Young. En particulier, il y a unicité de la réduction de Jordan.

Csq : on peut dénombrer le nombre d'orbites dans le cône nilpotent, c'est le nombre de tableau de Young à n cases, càd le nb de partitions de n, noté p(n). [Nou 174] *p(n) est le coeff de t^n dans le produit infini des 1/(1-t^i)*

Maintenant, u est un endomorphisme quelconque.

Th : Jordan pour matrice quelconque

Th : polynôme caract + tableaux de Young = invariants totaux de similitude. Autrement dit, A et B sont semblables ssi A et B ont mêmes vp et si toute valeur propre l et tout entier positif k, dim(Ker(A-l*Id)^k)=dim(Ker(B-l*Id)^k) *(se servir de Dunford)* A VOIR

Appl : M est semblable à sa transposée sur Mn(C) [Gou 201] *Il suffit de montrer qu'un bloc de Jordan est semblable à sa transposée. Pour ça, on réorganise les vecteurs de la base de Jordan et ça marche.*

Prop : matrices semblables sur C ssi semblables sur R [Gou 158] *(reste vrai pour toute extension L/K)*

Csq : les orbites sur R sont données par l'intersection des orbites sur C avec Mn(R).

3) Classes de conjugaison

Deux premiers résultats :

M est nilp ssi M et lM sont semblables pour tout l inversible ssi il existe l non nul non racine de l'unité tq lM semblable à M [BMP 199]

N nilpotent ssi 0 est ds l'adhérence de la classe de conj de N. [BMP 199+200]

D'après le th précédent, il y a une infinité de classes de similitudes sur Mn(C) car deux matrices au polynôme caract différent ne seront pas semblables, et il y a une infinité de pol caract possible. Par contre, pour un poly caract fixé, il y a un nb fini d'orbites.

Appl : dénombrement des classes de similitude de matrices pour un polynôme caractéristique donné. *(égal à p(k_1)*…*p(k_r) si les k_i sont les dim des SEC)* En particulier, dénombrement du nombre de classes de similitude parmi les matrices nilpotentes *(égal à p(n))*

Déf et prop : ordre de Chevalley, ordre élémentaire. L'ordre élémentaire engendre l'ordre de Chevalley

Th : clôture des orbites

Développements :
Image de l'exponentielle matricielle [BMP 213] (***) (mauvaise idée)
Réduction de Jordan [???] (***)
Théorème de Burnside [Nourdin]

Ce que je n'ai pas mis :
- Crochet de Lie et matrices nilp [BMP 207]
- Critère de nilpotence de JP Serre [BMP 210]
- N nilp d'indice n => les seuls sev stables par N sont les Ker(N^i) [BMP 201]
- Si A et B commutent avec le crochet de lie [A,B]=AB-BA alors [A,B] est nilp [Mn 17]
- Théorème de Burnside
- Séries formelles (voir http://math.univ-lyon1.fr/~germoni/agreg/trigo_nilpotent.pdf)

Bibliographie :
[BMP] Objectif agreg
[Gou] Gourdon - Algèbre
[Nou] Nourdin
[Cald] Caldero
[Mn] Mneimné – Réduction des endomorphismes
[MT] Mneimnès Testard
[Cog] Cognet

Rapport du Jury :
Il est possible de mener une leçon de bon niveau, même sans la décomposition de Jordan (qui n'est plus exigible dans le programme 2009), à l'aide des noyaux itérés. Il y a un nombre fini de classes de conjugaison. On peut avantageusement étudier l'application exponentielle sur le cône des matrices nilpotentes. Attention à ne pas se perdre dans les détails inutiles concernant le logarithme d'une matrice unipotente ou l'exponentielle d'une matrice nilpotente. L'utilisation des séries formelles ou des développements limités sont bien utiles. Les matrices nilpotentes de rang r ne sont pas toutes conjuguées entre elles.
2003 : insister sur la structure par bloc de la matrice de Jordan (attention à l'énoncé du Gourdon).